

問題

$xyz$  空間に 4 点  $P(0,0,2)$ ,  $A(0,2,0)$ ,  $B(\sqrt{3},-1,0)$ ,  $C(-\sqrt{3},-1,0)$  をとる。

四面体  $PABC$  の  $x^2 + y^2 \geq 1$  を満たす部分の体積を求めよ。

(2012 東京工業大学)

解法 1: 平面  $z=t$  で切断し, 必要な面積 (被積分関数) を  $t$  と  $\theta$  の合成関数にする。

三角形 ABC を四面体 PABC の底面とすると,

$$AB=BC=CA=2\sqrt{3}, \text{ 重心の座標 } \left( \frac{0+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{3}, \frac{2+(-1)+(-1)}{3}, \frac{0+0+0}{3} \right) = (0,0,0) \text{ より,}$$

正三角形 ABC は, 原点 O を重心とする一辺の長さ  $2\sqrt{3}$  の正三角形である。

また, 正三角形の内心と重心が一致することから, 内接円の半径を  $r$  とすると,

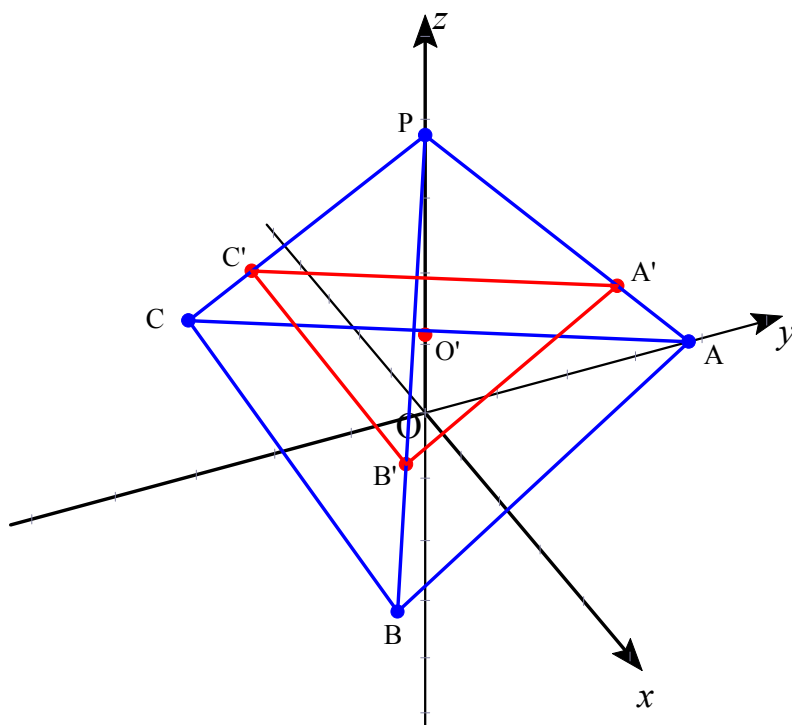
$$\triangle ABC \text{ の面積について, } \frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}r(2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}) \quad \therefore r=1$$

よって, 底面, すなわち  $z=0$  において, 円  $x^2+y^2=1$  は  $\triangle ABC$  に内接する。

さらに, 平面  $z=t$  ( $0 \leq t \leq 2$ ) と PO, PA, PB, PC の交点を  $O', A', B', C'$  とすると,

$A'B'=B'C'=C'A'$  ( $AB//A'B', BC//B'C', CA//C'A'$ ),  $\triangle PO'A' \equiv \triangle PO'B' \equiv \triangle PO'C'$  より,

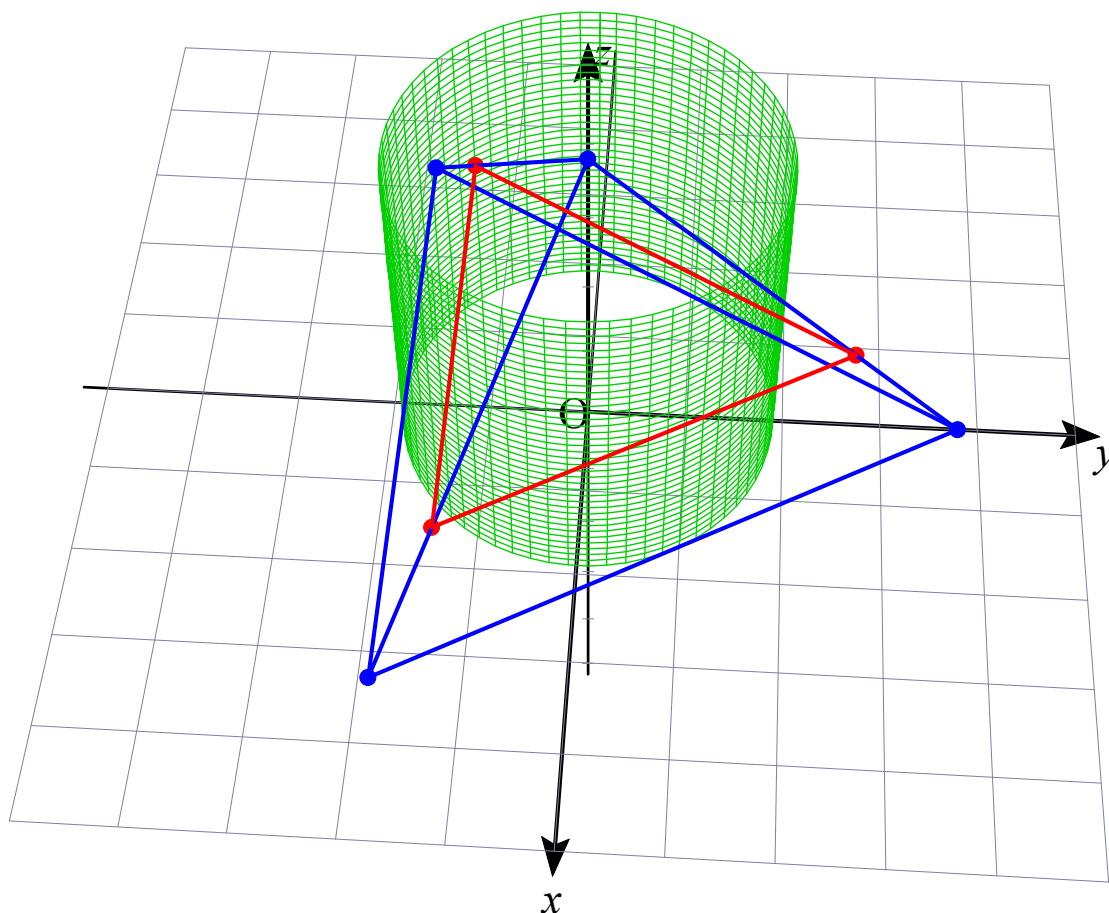
$\triangle A'B'C'$  は重心を  $O' (0,0,t)$  とする正三角形である。



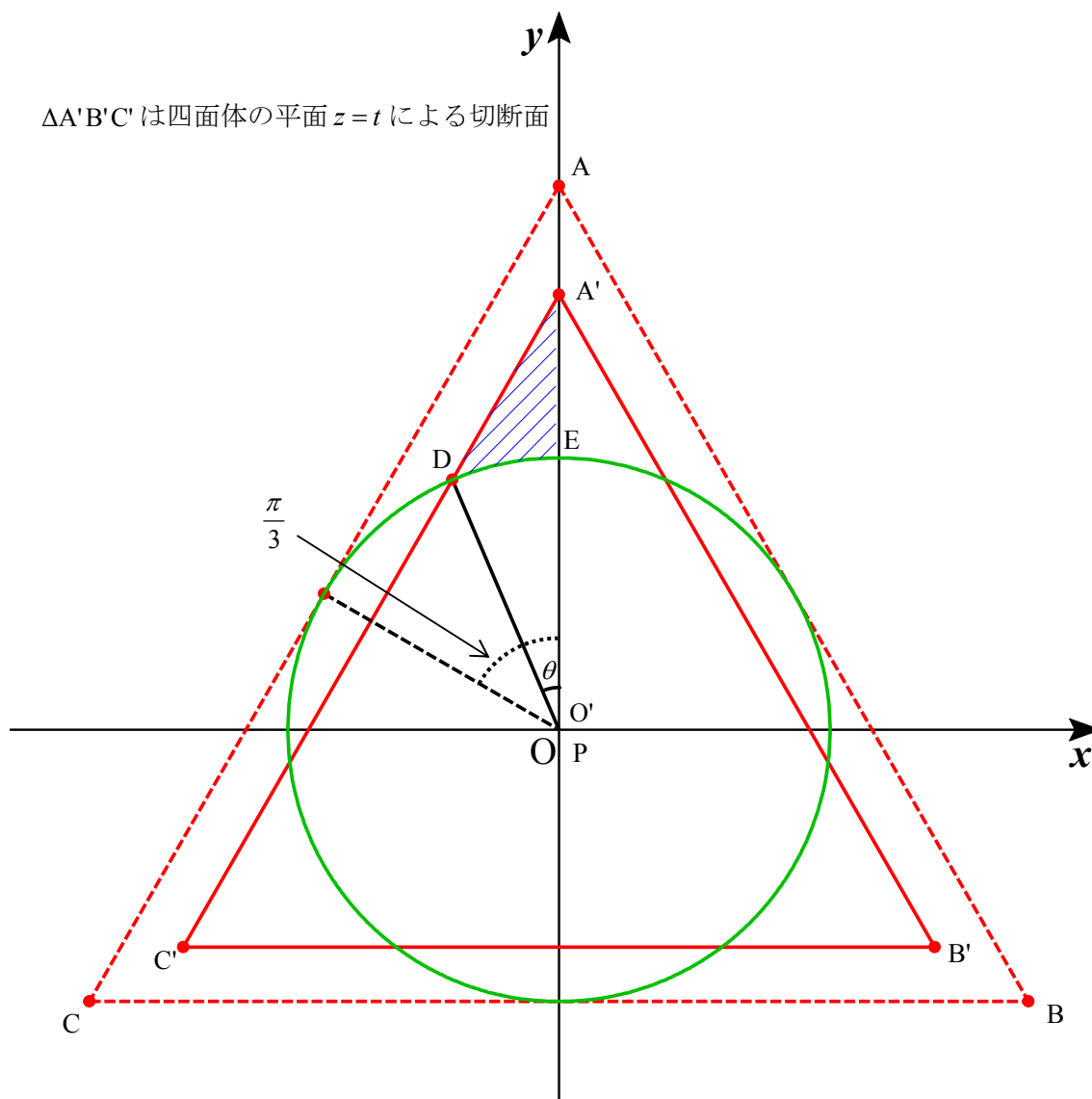
よって、 $\triangle A'B'C'$ の周を含む内部の領域のうち、 $x^2 + y^2 \geq 1$ を満たす部分の面積を求め、それを $t$ について積分すればよい。

**コツ**

切断面の平面図形のうち、必要な部分の交点や直線をチェックし、それを別の角度から眺めることで、それらの位置や式を媒介変数表示する。

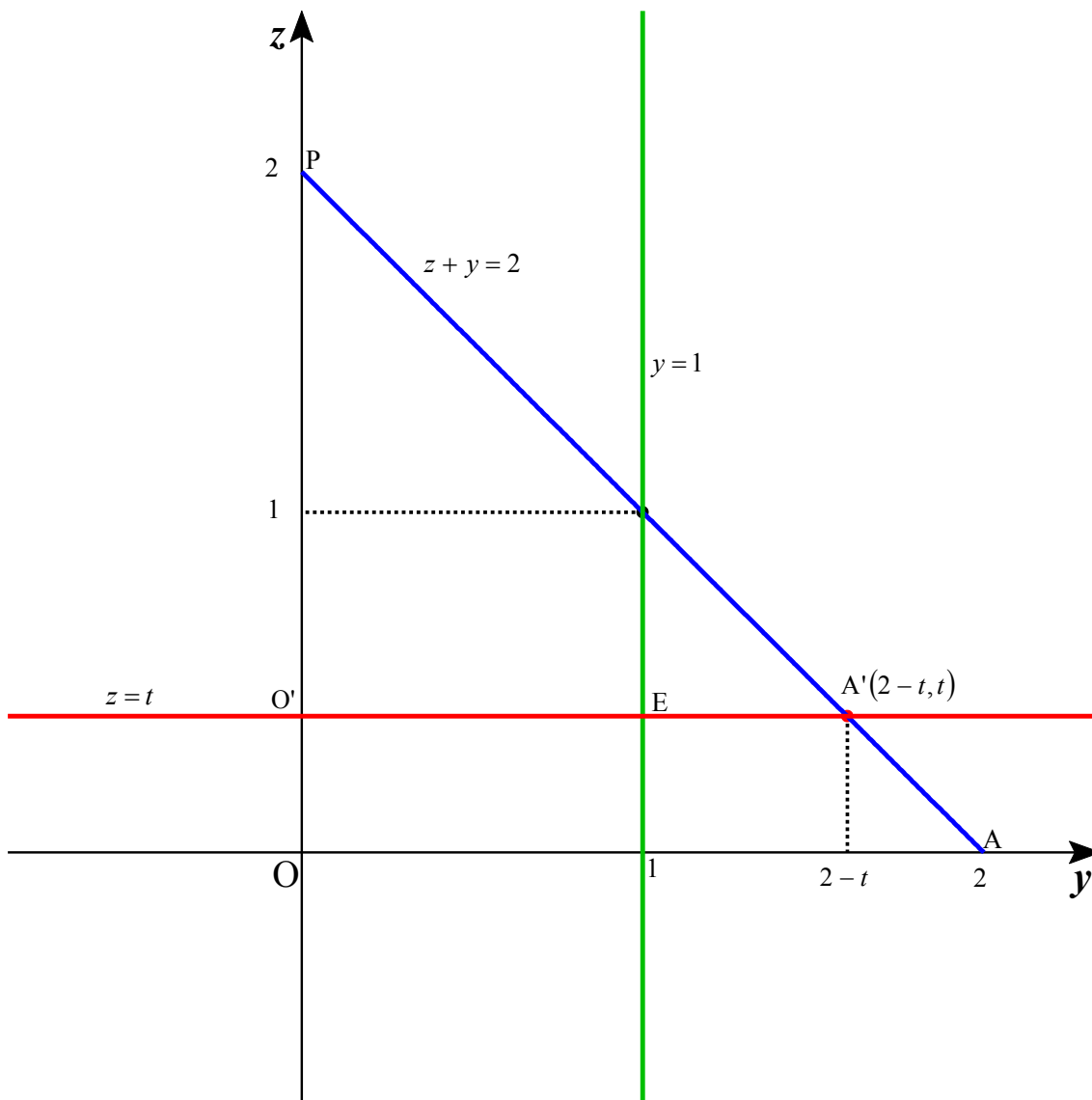


$xy$  平面上に投影した図



平面  $z=t$  の切断面における題意を満たす部分の面積は、対称性と合同性より、 $\Delta O'A'D$  の面積から扇形  $O'DE$  の面積を引いた面積を 6 倍したものである。

左図斜線部を含む図形を  $yz$  平面上に投影した図



$\Delta O'A'D$  の面積から扇形  $O'DE$  の面積を引いた面積を  $S(t)$  とすると、

$O'D = O'E = 1$  より、

$$\Delta O'A'D \text{ の面積} = \frac{1}{2} O'D \cdot O'A' \sin \theta = \frac{1}{2} (2-t) \sin \theta \quad \left( 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{扇形 } O'DE \text{ の面積} = \frac{1}{2} \theta$$

$$\therefore S(t) = \frac{1}{2} (2-t) \sin \theta - \frac{1}{2} \theta$$

また、 $0 \leq t \leq 1$

$$\text{よって、求める体積を } V \text{ とすると、} V = 6 \int_0^1 S(t) dt = 3 \int_0^1 \{(2-t) \sin \theta - \theta\} d\theta$$

ここで、 $\angle D'A'O' = \frac{\pi}{6}$ ,  $O'D' = 1$ ,  $\frac{O'A'}{\sin \angle A'D'O'} = \frac{O'D'}{\sin \angle DA'O'}$  (正弦定理) より,

$$O'A' = 2 \sin\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right)$$

$$\therefore 2 - t = 2 \sin\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right) \quad \therefore dt = 2 \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right) d\theta \quad \text{また, } t=1 \Rightarrow \theta=0, \quad t=0 \Rightarrow \frac{\pi}{3}$$

よって、 $S(t)$  は  $\theta$  で置換積分でき、

$$\begin{aligned} 6 \int_0^1 S(t) dt &= 3 \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \left\{ 2 \sin\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right) \sin \theta - \theta \right\} \cdot 2 \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right) d\theta \\ &= 12 \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \sin\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right) \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right) \sin \theta d\theta + 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \theta \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right) d\theta \end{aligned}$$

さらに、ここで、

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right) \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right) \sin \theta &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{5}{3}\pi - 2\theta\right) \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[ \cos\left\{\left(\frac{5}{3}\pi - 2\theta\right) - \theta\right\} - \cos\left\{\left(\frac{5}{3}\pi - 2\theta\right) + \theta\right\} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \cos\left(\frac{5}{3}\pi - 3\theta\right) - \cos\left(\frac{5}{3}\pi - \theta\right) \right] \end{aligned}$$

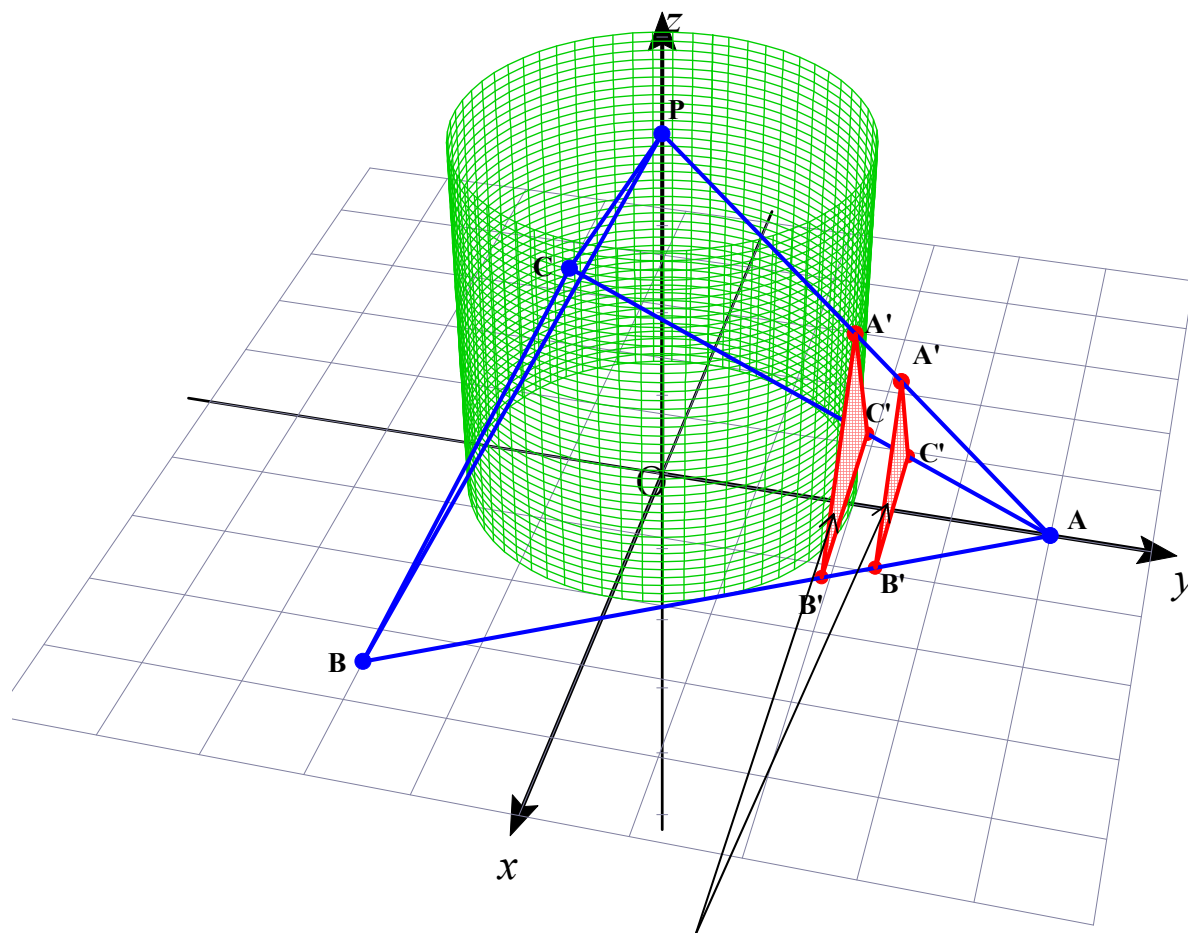
より、

$$\begin{aligned} 12 \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \sin\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right) \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right) \sin \theta d\theta &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ \cos\left(\frac{5}{3}\pi - \theta\right) - \cos\left(\frac{5}{3}\pi - 3\theta\right) \right\} d\theta \\ &= 3 \left[ -\sin\left(\frac{5}{3}\pi - \theta\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{5}{3}\pi - 3\theta\right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 3 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \theta \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right) d\theta &= 6 \left[ -\theta \sin\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right) d\theta \\ &= -2\pi + 6 \left[ \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= -2\pi + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

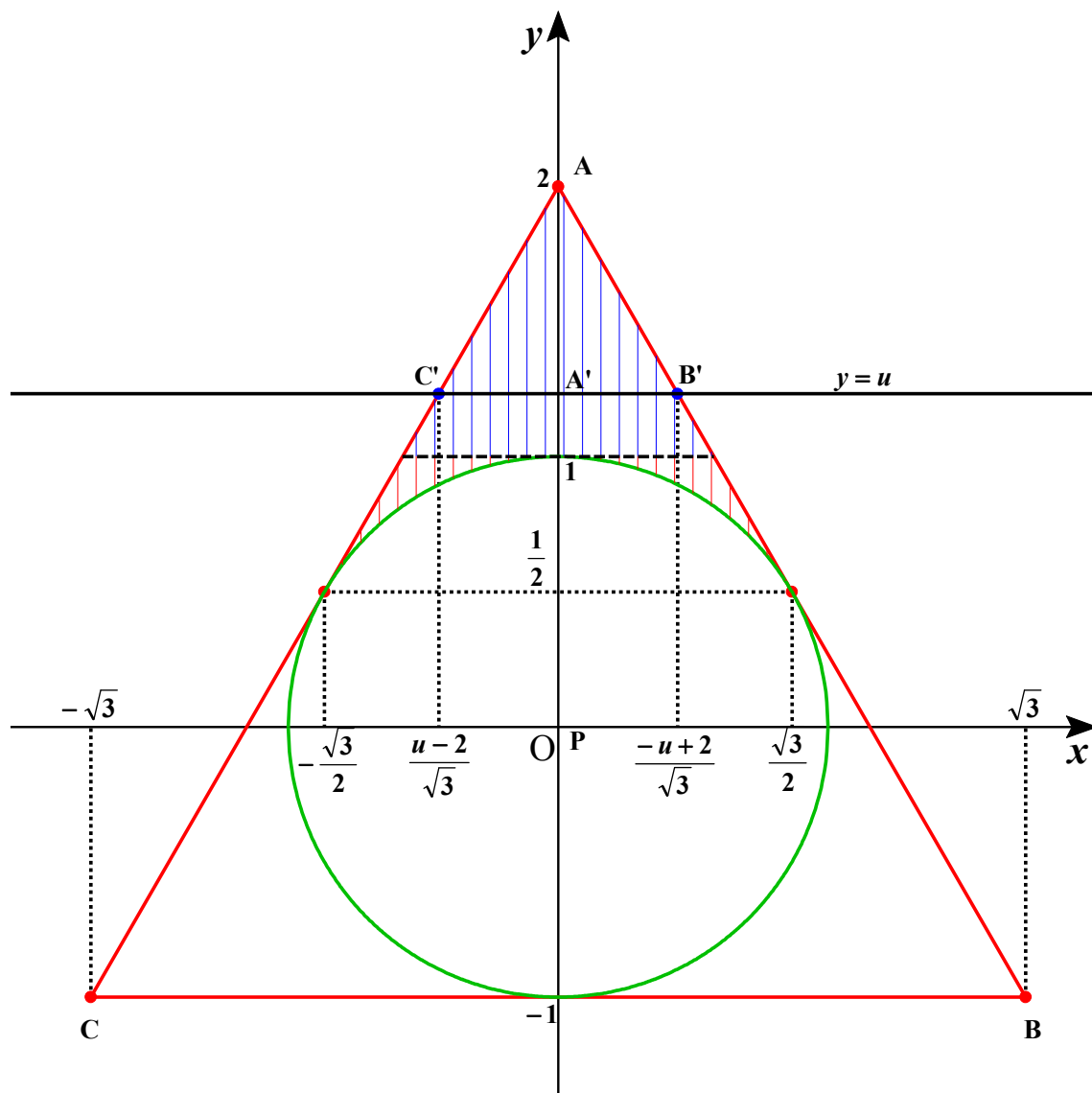
よって、 $V = \sqrt{3} + (-2\pi + 3\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} - 2\pi \quad \dots \dots$  (答)

解法 2 : 平面  $y = u$  で切断



四面体の平面  $y = u$  による切断面を  $\triangle A'B'C'$  とする。  
 右は円柱の側面と交わらない場合  
 左は円柱の側面と交わる場合

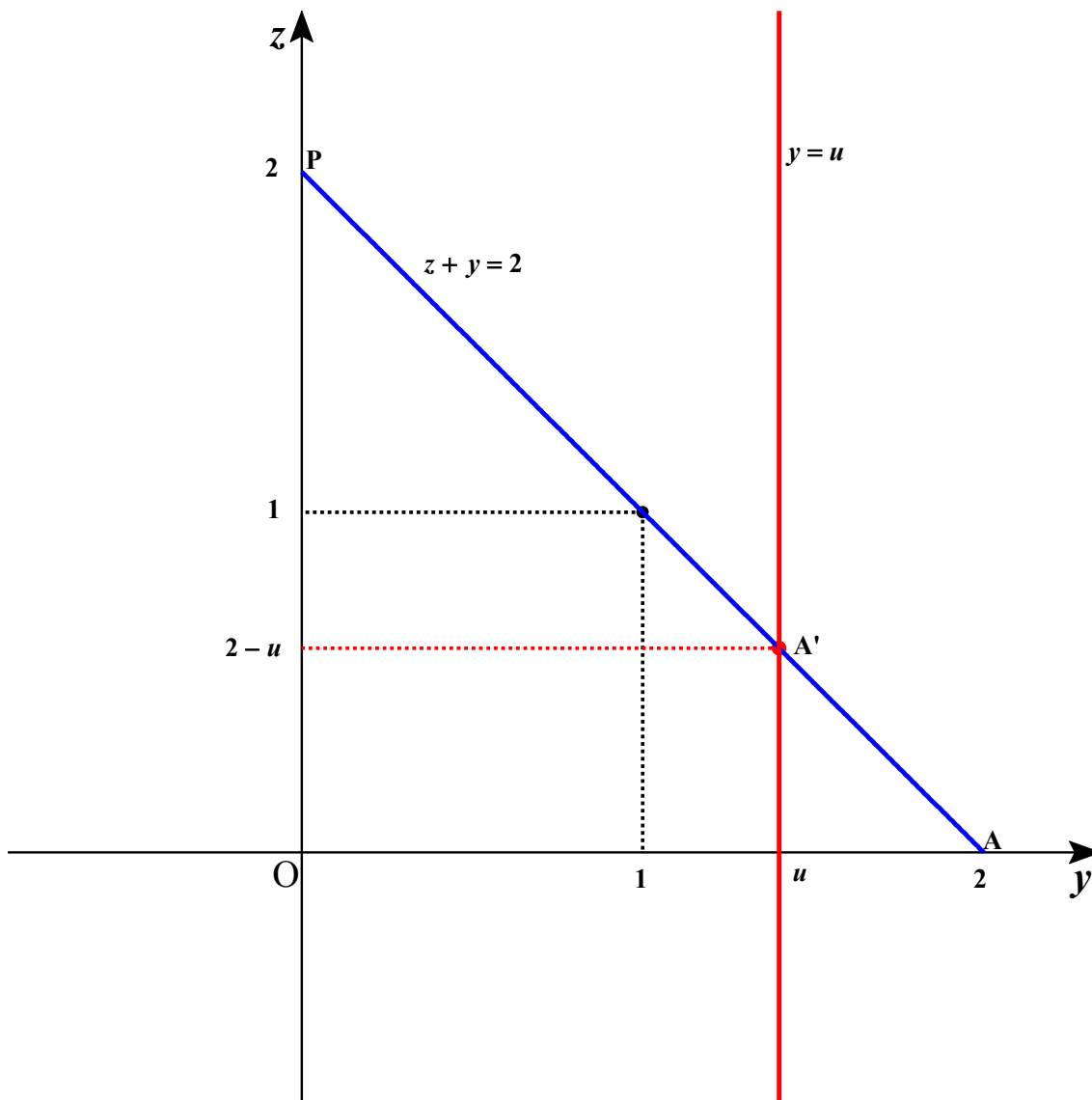
(i)  $1 \leq u \leq 2$  のときの切断面の面積と体積  
 $xy$  平面に投影した図

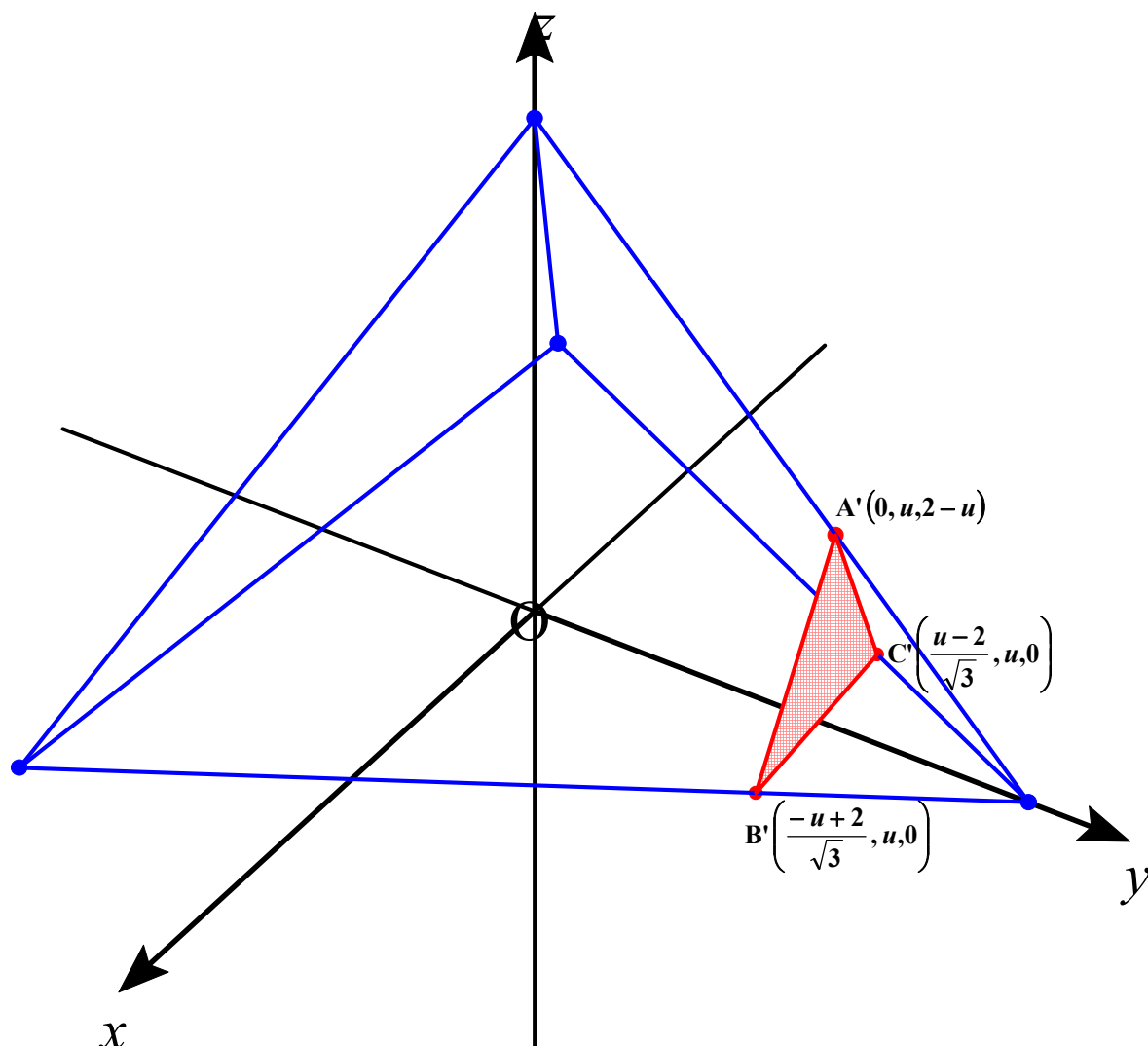


$\frac{1}{2} \leq u \leq 1$  (青色縦線) のとき重なり,  $1 \leq u \leq 2$  (赤色縦線) のとき重ならない。



yz 平面上に投影した図





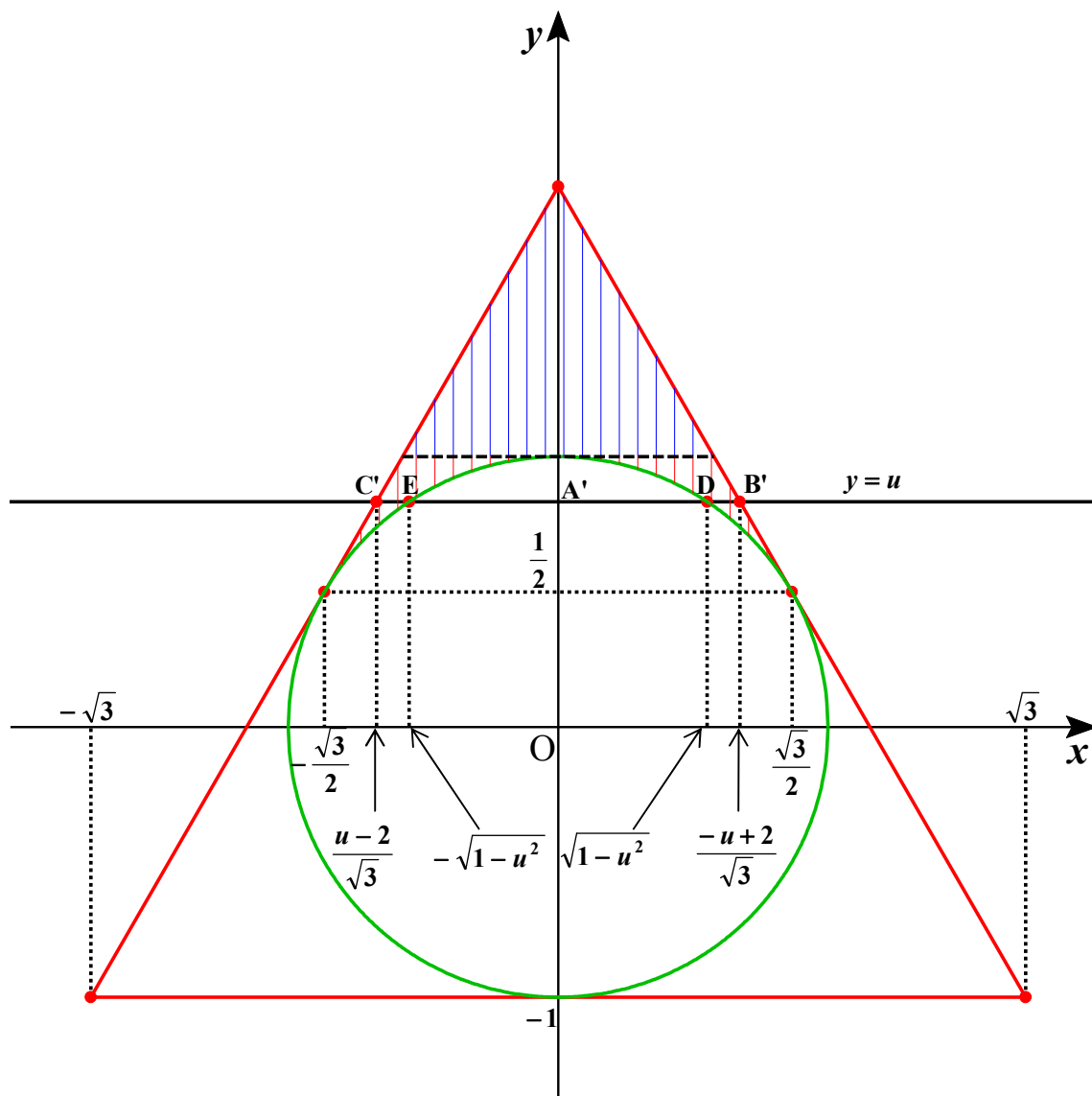
$$A'B' = \sqrt{\left(\frac{-u+2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0^2 + (u-2)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}(2-u), \quad A'C' = \frac{2}{\sqrt{3}}(2-u), \quad B'C' = \frac{2}{\sqrt{3}}(2-u) \text{ より,}$$

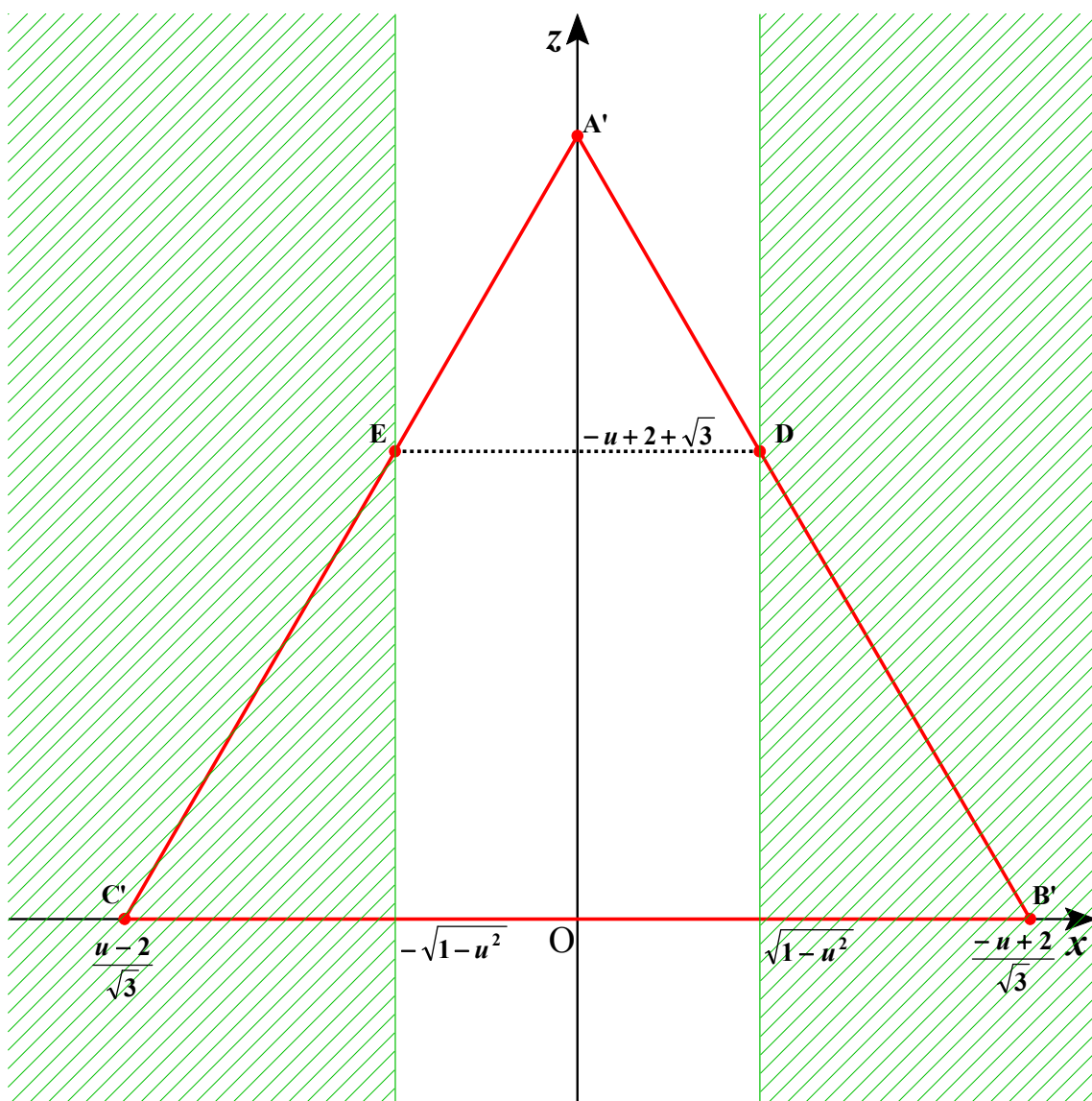
$\Delta A'B'C'$  は正三角形

$$\therefore \Delta A'B'C' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}}(2-u) \right\}^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}(2-u)^2$$

$$\therefore V = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_1^2 (2-u)^2 du \quad \dots \textcircled{1}$$

(ii)  $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$  のときの切断面の面積と体積





より、 $\triangle A'B'C'$  と斜線部領域の面積は、

$$\begin{aligned}
 2 \times \frac{1}{2} \left( \frac{-u+2}{\sqrt{3}} - \sqrt{1-u^2} \right)^2 \tan 60^\circ &= \sqrt{3} \left\{ \frac{(-u+2)^2}{3} + 1 - u^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} (2-u)\sqrt{1-u^2} \right\} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} (u-2)^2 - \sqrt{3}(u^2-1) - 4\sqrt{1-u^2} + 2u\sqrt{1-u^2} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} (u-2)^2 - \sqrt{3}(u^2-1) - 4\sqrt{1-u^2} - \frac{2}{3} \left\{ (1-u^2)^{\frac{3}{2}} \right\}'
 \end{aligned}$$

$$\therefore V = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 (u-2)^2 du - \sqrt{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 (u^2-1) du - 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-u^2} du - \frac{2}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left\{ (1-u^2)^{\frac{3}{2}} \right\}' du \quad \dots \textcircled{2}$$

①+②より,

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{1}{2}}^2 (u-2)^2 du - \sqrt{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 (u^2-1) du - 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-u^2} du - \frac{2}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left\{ (1-u^2)^{\frac{3}{2}} \right\}' du \\
&= \frac{\sqrt{3}}{9} \left[ (u-2)^3 \right]_{\frac{1}{2}}^2 - \sqrt{3} \left[ \frac{u^3}{3} - u \right]_{\frac{1}{2}}^1 - 4 \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{2}{3} \left[ (1-u^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{5\sqrt{3}}{24} - \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3}\pi
\end{aligned}$$

よって、求める体積は、 $3 \times \left( \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3}\pi \right) = 4\sqrt{3} - 2\pi \quad \dots \text{(答)}$